# Problemas de Mecánica Cuántica (para el Exámen Predoctoral)

## 1 Formalismo general

1. **Problema:** Consideremos un sistema cuántico que contiene sólo dos estados linealmente independientes $|1\rangle$ y $|2\rangle$,

$$
\begin{aligned}
|1\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
|2\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

   Supongamos que este sistema evoluciona por medio de un hamiltoniano que, en la base $\{|1\rangle, |2\rangle\}$, se representa por la matríz

$$
\hat{H} = \hbar\omega \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}
$$

   (a) Escribe el estado más general normalizado de este sistema.
   (b) Supongamos que, al tiempo $t = 0$, el sistema se encuentra en el estado $|1\rangle$. Determina el estado al tiempo $t \geq 0$.
   (c) Calcula el valor de esperado de la energía $\langle E \rangle$.
   (d) Si al tiempo $t = \frac{\pi}{4\omega}$ se efectua una medición del estado del sistema, ¿cuál es la probabilidad de encontrarlo en el estado $|1\rangle$, y cuál de encontrarlo en el estado $|2\rangle$?

2. **Problema:** Supongamos que un sistema en un cierto momento se encuentra en el estado $|\psi\rangle$. En este momento, efectuamos una medición de un observable $A$. Como podemos calcular la probabilidad para encontrar en esta medición un resultado $a$ para $A$ contenido en el intervalo $[a_1, a_2]$?

3. **Problema:** Demuestra que

$$\langle x|\, \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar} q\hat{p}} = \langle x+q|$$

para cualquier número real $q$.

4. **Problema:** Consideramos el operador

$$\hat{Q} = i\frac{d}{d\phi}$$

actuando en el espacio de Hilbert de funciones complejas en el intervalo $[0, 2\pi]$ que cumplen la condición de periodicidad

$$f(\phi + 2\pi) = f(\phi)$$

Es $\hat{Q}$ hermítico? Determina todos sus eigenvalores y eigenfunciones.

5. **Problema:** Explica como se define un *sistema completo de operadores que conmutan.*

6. **Problema:** Considerar un gas de partículas libres de masa $m$ no-relativistas y sin espín moviéndose en una caja cuadrada tres-dimensional. Encontrar una expresión para la densidad de estados $\rho(E)$. Recordar que $\rho(E)dE$ se define como el número de niveles de energía por unidad de volumen entre $E$ y $E + dE$.

7. **Problema:** Sea un sistema físico con momento angular total igual a uno. Escogemos una base que corresponde a los tres eigenvectores de la componente $z$ del momento angular, $J_z$, con eigenvalores $+1$, $0$, $-1$ respectivamente. Ahora damos un ensemble descrito por la matriz de densidad escrita en esta base:

$$\rho = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) ¿Es $\rho$ una matriz de densidad permisible?, da tu razonamiento.

(b) Asumiendo que es permisible, ¿describe un estado puro o un estado mixto?.

(c) Dado el ensemble descrito por $\rho$, ¿Cual es el valor promedio de $J_z$?.

(d) ¿Cual es la desviación estándar en valores medidos de $J_z$?.

## 2 Problemas en una dimensión

8. **Problema:**

Una partícula en una dimensión se mueve en el potencial del pozo infinito,

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ 0 & 0 \leq x \leq a \\ \infty & x > a \end{cases}$$

(a) Determina las eigenfunciones de energía normalizadas $\phi_n(x)$ y los eigenvalores asociados $E_n$.

(b) Supongamos que la partícula tiene, al tiempo $t = 0$, la función de onda

$$\psi(x, 0) = N\Big(\phi_1(x) + i\phi_3(x)\Big)$$

Determina $N$, $\psi(x,t)$, $\rho(x,t)$, y $\langle x \rangle(t)$.

(c) Supongamos que la partícula se encuentra en el estado con función de onda

$$\psi(x) = N\, x(a - x)$$

i. Determina la constante de normalización $N$.

ii. Determina el valor de esperado de la energía $\langle E \rangle$ en este estado.

iii. Supongamos que efectuamos una medición de la energía en este estado. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un resultado *diferente* de la energía $E_1$ del estado base? ¿Si se efectua esta medición, y el resultado es que sí $E \neq E_1$, cuál es la función de onda del estado inmediatamente después de la medición?

(d) Demuestra que cualquier solución de la ecuación de Schrödinger para el pozo infinito cumple la relación de recurencía

$$\psi(x, t+T) \quad = \quad \psi(x, t)$$

donde $T = 4ma^2/\pi\hbar$ (con $x, t$ arbitrarios).

9. **Problema:**

(a) Verifica que

$$\psi(x,t) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}\left(x^2 + \frac{a^2}{2}(1 + \mathrm{e}^{-2i\omega t}) + \frac{i\hbar t}{m} - 2ax\ \mathrm{e}^{-i\omega t}\right)\right]$$

(a es una constante real) es solución de la ecuación de Schrödinger (dependiente del tiempo) para el potencial

$$V(x) = \frac{m}{2}\omega^2 x^2$$

(b) Calcula $\rho(x,t)$, y describe el movimiento que resulta.

(c) Calcula $\langle x\rangle(t)$, $\langle p\rangle(t)$, y $\left\langle -dV/dx \right\rangle(t)$, y verifica que se cumple el teorema de Ehrenfest,

$$\begin{aligned} m\frac{d}{dt}\langle x\rangle &= \langle p\rangle \\ \frac{d}{dt}\langle p\rangle &= \left\langle -dV/dx \right\rangle \end{aligned}$$

10. **Problema:** Cálcula el valor promedio

$$\langle \phi_n | V | \phi_n \rangle$$

de la energía potencial en el estado estacionario $|\phi_n\rangle$ del oscilador armónico.

## 3 Momento angular

11. **Problema:**

Un espín $\frac{1}{2}$ se encuentra en el estado (en la base estandar)

$$\chi = N \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Calcula la constante de normalización $N$.

(b) Si efectuamos una medición de $S_z$, cual es la probabilidad de obtener el valor $+\hbar/2$?

(c) La misma pregunta para $S_x$.

(d) Supongamos que medimos $S_x$, y encontramos el resultado $+\hbar/2$. Cuál es el estado inmediatamente después de la medición? Si después efectuamos una medición de $S_z$, cuál es la probabilidad obtener el resultado $-\hbar/2$?

12. **Problema:** Consideramos un sistema de dos partículas con espín $\frac{1}{2}$ cuyas variables orbitales se pueden ignorar. Sea el hamiltoniano del sistema

$$H = \omega_1 S_{1z} + \omega_2 S_{2z}$$

donde $S_{iz}$ es la proyección del espín $S_i$ en el eje $z$ y $\omega_{1,2}$ son constantes reales. El estado inicial del sistema al tiempo $t = 0$ es

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[|+-\rangle - |-+\rangle\Big]$$

Al tiempo $t > 0$ se mide $\mathbf{S}^2 = (\mathbf{S_1} + \mathbf{S_2})^2$. ¿Cuáles son los posibles resultados, y cuáles son las probabilidades asociadas?

13. **Problema:** Supongamos que una partícula se encuentra en el estado con función de onda

$$\psi(\mathbf{r}) = N(x + y + 2z)\,\mathrm{e}^{-\alpha r}$$

donde $\alpha$ es una constante positiva y $N$ la constante de normalización apropiada. Usa el hecho que

$$\begin{aligned} Y_1^0 &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{z}{r} \\ Y_1^{\pm 1} &= \mp\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{x \pm iy}{\sqrt{2}\,r} \end{aligned}$$

para determinar, *sin calcular la constante de normalización* $N$, las probabilidades de encontrar, en una medición de $L_z$ en este estado, los valores $L_z = -\hbar, 0, \hbar$.

14. **Problema:** Consideramos una partícula con espín $\frac{1}{2}$ en el estado descrito por el espinor de Pauli $[\psi(\mathbf{r})]$ con (en coordenadas esféricas)

$$\begin{aligned} \psi_+(\mathbf{r}) &= N\,\mathrm{e}^{-\alpha r}\Big[Y_0^0(\theta,\phi) + 2Y_1^0(\theta,\phi)\Big] \\ \psi_-(\mathbf{r}) &= N\,\mathrm{e}^{-\alpha r}[Y_1^1(\theta,\phi) - iY_1^0(\theta,\phi)] \end{aligned}$$

donde $\alpha$ es una constante positiva.

(a) Determina la constante de normalización $N$.

(b) Se mide $S_z$. Cuáles son los resultados posibles, y cuáles las probabilidades asociadas? Misma pregunta para $L_z$ y $L^2$.

15. **Problema:** Tres partículas de espín 1/2 con operadores de espín $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$, $\mathbf{S}_3$ están fijos a los esquinas de un triángulo. Los espines interactúan por medio del Hamiltoniano de interacción:

$$H = J\left(\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_3 + \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_3\right)$$

Encontrar los niveles de energía del sistema y sus degeneraciones.

## 4 Potenciales centrales

16. **Problema:** Explica cuál papel juega el momento angular en la clasificación de los estados estacionarios del átomo de hidrógeno.

17. **Problema:** Positronium es un sistema ligado de un electrón y un positrón. Decide si la energía del estado de base de este sistema es (i) igual a la energía del estado base del hidrógeno (ii) más grande (iii) más pequeño.

18. **Problema:** Supongamos que un átomo de hidrógeno se encuentra en el estado $\psi_{433}$. Si en este momento medimos la observable $L_x^2 + L_y^2$, ¿cuáles son los posibles resultados, y cuáles las probabilidades asociadas?

## 5 Teoría de la perturbación

19. **Problema:** Para el oscilador armónico con potencial

$$V(x) = \frac{m}{2}\omega^2 x^2$$

determina el cambio de las energías $E_n^0$ debido al efécto de un termino de perturbación

$$H' = \lambda x^4$$

usando la serie de la perturbación al primer orden.

20. **Problema:** Consideramos el potencial del pozo infinito en una dimensión

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ 0 & 0 \le x \le a \\ \infty & x > a \end{cases}$$

con un hamiltoniano de perturbación

$$H' = \lambda\, \delta(x - a/2)$$

donde $\lambda$ es una constante real.

(a) Cálcula los eigenvalores de energía $E_n$ usando la teoría de perturbación al primer orden.
(b) Cálcula el estado base $|\phi_1\rangle$ al mismo orden.

21. **Problema:** Considerar una partícula en un pozo infinito unidimensional con:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ 0 & 0 \le x \le a \\ \infty & x > a \end{cases}$$

En el tiempo $t > 0$ el potencial en el rango $0 \le x \le a$ cambia por un término adicional dado por:

$$V(x) = \lambda \left( x - \frac{a}{2} \right) \left( \frac{t}{\tau} \right) \exp\left(-t/\tau\right)$$

(a) Para $t < 0$ encontrar los eigenvalores de energía $E_n$ permitidos para la partícula y sus correspondientes funciones de onda $\psi_n(x)$.

(b) Supongamos que la partícula está en su estado base para $t < 0$, usar la teoría de perturbaciones dependiente del tiempo a primer orden para encontrar la probabilidad de que la partícula sea encontrada en el estado $\psi_n(x)$ con $n > 1$ en el tiempo $t = \infty$. ¿Para cuales valores de $n$ es la probabilidad anterior igual a cero?.

(c) ¿Cual es la probabilidad de permanecer en el estado base cuando $\tau \to \infty$. Explica cualitativamente porque esperas que tu respuesta es correcta.

## 6 Dispersión no relativista

22. **Problema:** Consideramos el potencial en una dimensión

$$V(x) = -\frac{\hbar^2 a^2}{m} \frac{1}{\cosh^2(ax)}$$

$(a > 0)$. Demuestra que la función

$$\psi_k(x) = A\Big(\frac{ik - a\tanh(ax)}{ik + a}\Big)\, \mathrm{e}^{ikx}$$

$(k = \sqrt{2mE/\hbar})$ es una solución de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo con energía $E$ positiva. Determina la forma asintótica de $\psi_k(x)$ para $x \to \pm\infty$, y usa el resultado para determinar los coeficientes de reflexión y transmisión $R$ y $T$.

23. **Problema:**

(a) Explica (en manera cualitativa) porque el método de ondas parciales en general es más utíl para procesos de dispersión con baja energía.

(b) Explica (en manera cualitativa) porque el método de Born en general es más utíl para procesos de dispersión con alta energía.

24. **Problema:** Sea $V(r)$ el siguente potencial central:

$$\begin{aligned} V(r) &= -V_0, & r < a \\ V(r) &= 0, & r > a \end{aligned}$$

donde $a, V_0 > 0$.

(a) Demuestra que la solución general de la ecuación de Schrödinger radial con $E > 0$ y con $l = 0$ es

$$\begin{aligned} u_{k,0}(r) &= A \sin(kr + \delta_0), & r > a \\ &= B \sin K'r, & r < a \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \\ K' &= \sqrt{k_0^2 + k^2} \end{aligned}$$

(b) Ponendo $A = 1$, demuestra que

$$\begin{aligned} B^2 &= \frac{k^2}{k^2 + k_0^2 \cos^2(K'a)} \\ \delta_0 &= -ka + \alpha(k) \end{aligned}$$

donde

$$\alpha(k) = \arctan\Big(\frac{k}{K'} \tan(K'a)\Big)$$

## 7 Partículas identicas

25. **Problema:** Calcula la energía del estado de base para un sistema de cinco partículas identicas que se encuentran en el potencial de un

(a) oscilador armónico en una dimensión

(b) oscilador armónico en tres dimensiones

para ambos casos, bosones y fermiones.

26. **Problema:** Supongamos que tenemos tres partículas en un sistema con sólo tres estados independientes, $\psi_a(x), \psi_b(x)$, y $\psi_c(x)$. ¿Cuántos estados independientes existen en el sistema total de las tres partículas si las partículas son (i) distinguibles (ii) bosones identicas (iii) fermiones identicas?

27. **Problema:**

    (a) Un sistema de dos partículas *distinguibles* de espín $\frac{1}{2}$ se encuentra en el estado

    $$\mid \psi\rangle \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \mid 1+\rangle \otimes \mid 2-\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} \mid 1-\rangle \otimes \mid 2+\rangle \qquad (1)$$

    donde $\mid i\pm\rangle$ denota el eigenestado normalizado con eigenvalor $\pm\frac{\hbar}{2}$ de la componente $z$ del vector de espín, $S_{iz}$, en el espacio de la partícula $i$. Si efectuamos una medición simultánea de las observables $S_{1x}$ y $S_{2x}$, ¿ cuál es la probabilidad de obtener el risultado $S_{1x} = +\frac{\hbar}{2}$ y $S_{2x} = -\frac{\hbar}{2}$?

    (b) Un sistema de dos fermiones identicas de espín $\frac{1}{2}$ se encuentra en el mismo estado (1). Si efectuamos una medición simultanea de $S_x$ para ambas partículas, ¿ cuál es la probabilidad de obtener el resultado $+\frac{\hbar}{2}$ para una partícula, y $-\frac{\hbar}{2}$ para la otra?

## 8 Las ecuaciones de Dirac y de Klein-Gordon

28. **Problema:** Describe las razones porque, historicamente, la ecuación de Klein-Gordon no se consideró una ecuación apropiada para construir una mecánica cuántica relativista.

29. **Problema:** Describe la resolución del problema de las energías negativas en el marco de la teoría de Dirac.

30. **Problema:** Empezando con la forma hamiltoniana de la ecuación de Dirac

$$\hbar i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i} \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \beta m c^2 \psi$$

lleva a cabo la construcción de la corriente de probabilidad $J^\mu$ y demuestra que se cumple la ecuación de continuidad $\frac{\partial}{\partial x^\mu} J^\mu = 0$.

31. **Problema:** Calcula el espectro de energias de un electrón relativista en un campo magnético constante al largo de la dirección $z$, $\mathbf{B} = (0, 0, B)$:

   (a) Escribe la ecuación de Dirac en la forma hamiltoniana,

$$\hbar i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i} \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \Big( \frac{\partial}{\partial x^i} + ieA_\mu \Big) \psi + \beta m c^2 \psi + eA^0 \psi$$

   (b) Demuestra que, para un campo puramente magnético en el eje $z$, el cuadri-vector $(A^\mu)$ se puede seleccionar como $(0, 0, Bx, 0)$.

   (c) Usando la representación de Dirac,

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   busca las soluciones estacionarias en la forma

$$\psi \quad = \quad \mathrm{e}^{-iEt} \binom{\phi}{\chi}$$

   y elimina $\chi$ de las dos ecuaciones acopladas que resultan.

   (d) Resuelve la ecuación para $\phi$ usando el ansatz

$$\phi(\mathbf{r}) \quad = \quad \mathrm{e}^{i(p_y y + p_z z)} f(x)$$

   y resultados conocidos sobre el oscilador armónico.